

DIFFICULTES RENCONTREES PAR LES ETUDIANTS DANS L'ENSEIGNEMENT DE LA TOPOLOGIE AU DEBUT DU GRADUAT EN MATHEMATIQUES

Par

**KAPENGA KAZADI NTUNDULA Jean-Marie^{*, **}
LOWOLO OKAKO PENE ELUNGHA Sylvain^{*, **}**

* Centre de Recherche sur l'enseignement de Mathématique.

** Département de Mathématiques et informatique, Faculté des sciences, Université
Pédagogique Nationale.

RESUME

Dans un article précédent, nous nous sommes rendus à l'évidence que les concepts topologiques font intervenir un formalisme nouveau pour les étudiants. Nous avons repéré dans ce formalisme différents types de symbolismes. Le formalisme introduit dans les définitions pose des problèmes de compréhension et sa seule fonctionnalité consiste à être manipulée dans les exercices.

Une enquête s'impose en deuxième année dans notre démarche de compilation des difficultés d'étudiants et aussi dans la vérification de leur acquis réel des notions topologiques de première année.

C'est ainsi que dans le présent article nous nous proposons d'établir un bilan des acquis des étudiants par le canal d'un questionnaire. Les résultats de l'enquête menée auprès des étudiants de deuxième année de Graduat en Mathématique-Informatique et en Mathématique-Physique nous montrent que les connaissances de ces derniers sont moins stables et peu disponibles. Ces étudiants ne s'interrogent pas sur le sens de leurs écrits, par contre, certains sont capables de manipuler une écriture quantifiée qui n'a pas de sens. L'aspect manipulation est présent chez les étudiants, malheureusement cette fonction manipulateur du formalisme n'est pas associée à une prise de sens. La plupart des étudiants ne parviennent pas à se justifier dans leur choix de réponse. Il a été constaté beaucoup d'imprécisions dans leurs productions.

MOTS-CLES

Analyse a priori – analyse a posteriori – concepts topologiques – cadre – outil/objet – formalisme – erreurs – écritures – aspect manipulateur – prise de sens.

ABSTRACT

In the previous article, we show as an evidence that the topologic notions call new student's formalism. We discover different types of symbolisms in this new notions. The definition introduced in the formalism, still hard to understand and the only use its the application in the exercises. So it is an obligation to have an investigation for those who are in the second level to verify the students requirements in topological first level notion.

So, in this present article, we are proposing to establish a student's draft survey. The results collected with students of second level (second year of university) of computer science field and mathematics and physics shows us that there is an instability and indisponibility in their knowledge. There is not students asking question on the topological writing, other are able to manipulate a none sens quantificate writing. The manipulating aspect is present in the students being but that ability it is not associate with a perfect knowledge sens. More of them are not able to justify the writing choose in the answers. During this investigation, we get a constat that much imprecisions in their productions.

I. INTRODUCTION

Dans l'article précédent, nous avons analysé l'organisation du cours d'Analyse 1 et particulièrement sur la partie relative à la Topologie. Nous présentons dans celui-ci les résultats de l'enquête que nous avons menée le 11 février 2019 en administrant un questionnaire anonyme aux étudiants de deuxièmes années de graduat en sciences mathématiques de l'Université Pédagogique Nationale.

II. Déroulement

Le test s'est déroulé pendant les heures du cours d'Algèbre 1 et a duré environ une heure et cinq minutes. Au total cinquante-neuf étudiants ont répondu individuellement au questionnaire.

Avant de démarrer, nous avons précisé aux étudiants que le test portait sur les notions de topologie vues en première année et que nous avions comme objectif de dresser, compte tenu des réponses au questionnaire, un bilan de leurs acquis et d'essayer de provoquer des conditions susceptibles d'améliorer leur compréhension des concepts topologiques. Ce choix se justifie par le fait que ces étudiants venaient de suivre entièrement le cours d'Analyse 1 et qu'ils sortaient d'une session d'examens au cours de laquelle ils venaient de réviser leurs cours.

III. Méthodologie

En plus de ce qui vient d'être dit sur le public-cible et le questionnaire lui administré, nous avons procédé à une analyse a priori du questionnaire administré. Celle-ci est suivie d'une analyse a posteriori. Une étude longitudinale est ensuite menée en analysant les productions individuelles de quelques étudiants choisis au hasard.

IV. Analyse a priori

Quoique n'ayant pas une définition reconnue, la littérature s'intéresse plus à son utilisation pratique en tant qu'outil/processus ou activité selon ses multiples champs d'application. Selon les cas, on peut avoir une analyse a priori d'une situation d'apprentissage, une analyse a priori d'une séance de mathématiques, une analyse a priori d'un exercice, etc. Charnay et Mante (2016, p.51) disent que « l'analyse a priori d'une séance de mathématiques permet d'anticiper ce que les élèves vont dire ou faire face à une activité ». Plus précisément, « l'analyse a priori prend appui sur trois questionnements :

- Quelles procédures correctes les élèves peuvent-ils utiliser pour résoudre la tâche ?
- Quelles erreurs les élèves risquent-ils de faire ? Quels obstacles peuvent-ils rencontrer ?
- De quelle façon les élèves vont-ils pouvoir investir les éléments de savoir visés ?

C'est sur cette base que nous avons procédé à l'analyse a priori des questions (exercices) suivantes.

IV.1. Question 1

La question 1 porte sur la connaissance des définitions. Les réponses des étudiants vont préciser les traces gardées de ces définitions.

Réponses attendues (au moins par sous-question)

a) Ensemble ouvert

- Un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ si et seulement si $E = \text{int}(E)$ (définition en termes d'intérieur).
- $E \subset \mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ si et seulement si $\forall x \in E, \exists r > 0 :$
 $I(x, r) \subset E$ (définition en termes de boules).
- $E \subset \mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ si et seulement si $\forall x \in E, \forall \{x_n\} \subset E$, si $x_n \rightarrow x$, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, x_n \in E$ (définition en termes de suites). Et ainsi de suite.

b) Ensemble fermé

- Un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}$ si et seulement si $\mathbb{R} \setminus E$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ (définition en termes de différence au sens de complémentaire).
- Un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}$ si et seulement si $E = \bar{E}$ (définition en termes d'adhérence).
- Un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}$ si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}, \forall r > 0, I(x, r) \cap E \neq \emptyset$ (définition en termes de boules).
- Un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est un fermé de $\mathbb{R}$ si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \{x_n\} \subset E, (x_n \rightarrow x) \Rightarrow x \in E$ (définition en termes de suites). Et ainsi de suite.

IV.2. Question 2

La question 2 teste les ensembles qui sont considérés comme références en matière d'ensembles ouverts, fermés. En particulier, cette question permet aussi d'analyser si les étudiants construisent les ensembles fermés en fonction des ensembles ouverts donnés et réciproquement.

Réponses attendues :

a) Trois exemples d'ensembles ouverts dans $\mathbb{R}$: $\emptyset, \mathbb{R},]3, 5[$.

b) Trois exemples d'ensembles fermés dans $\mathbb{R}$: $\emptyset, \mathbb{R}, [3, 5]$.

IV.3. Question 3

La véracité des affirmations proposées à la question 3 est simple à déterminer, mais pour justifier en détail son choix, l'étudiant est appelé à manipuler les écritures quantifiées et à utiliser la logique ; il peut aussi donner des contre-exemples appropriés (sous-questions (a) et (b)). L'affirmation (c) renvoie l'étudiant à la définition de la densité en termes d'adhérence.

Voici les réponses attendues :

a) Faux, car $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_0\right\}$ n'est pas égal à son adhérence. En effet, 0 est un point adhérent à $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_0\right\}$ mais $0 \notin \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_0\right\}$.

b) Vrai, parce que $]-4, 3[$ est différent de son intérieur $]-4, 3[$ est différent de son adhérence $[-4, 3]$.

c) Vrai, car $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

En effet, $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^\circ$ (d'après une propriété de l'adhérence)

$$\Leftrightarrow \bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \setminus \emptyset \quad ((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^\circ) = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \quad (\text{définition de la différence des ensembles}).$$

IV.4. Question 4

La question 4, dans sa sous-question (a), consiste à écrire $\{0\}$ sous forme de fermé $[0,0]$ et ensuite déterminer l'intérieur de ce fermé qui n'est autre que l'ensemble vide.

Réponse attendue : $\text{int}(\{0\}) = \text{int}([0,0]) \quad (\{0\} = [0,0])$

$$=]0,0[\quad (\text{définition de l'intérieur})$$

$$\text{int}(\{0\}) = \emptyset \quad (\text{car } 0 \notin]0,0[).$$

Tapez une équation ici.à la sous-question (b), la compréhension fine de la définition de l'adhérence est d'une grande nécessité. Le cadre de la théorie des ensembles est ainsi mobilisé.

Réponse attendue :

Si $A =]-2,3[$, alors $\overline{A} = (]-2,3[)^{\circ} \cup \text{Fr}(]-2,3[)$ (définition de $\overline{A}$)

$$\Rightarrow \overline{A} =]-2,3[\cup\{-2,3\} \quad (\text{définitions de l'intérieur et de la frontière})$$

$$\Rightarrow \overline{A} = [-2,3] \quad (\text{définition de la réunion d'ensembles}).$$

Quant à la sous-question (c) de la question 4, elle mélange les notions d'intérieur d'un ensemble et d'intersection d'une famille d'ensembles. Par rapport aux deux égalités précédentes, les données sont ici générales. Pour montrer cette troisième égalité, l'étudiant peut exprimer l'appartenance d'un point quelconque aux deux ensembles (intérieur d'une intersection et intersection d'intérieurs). La difficulté est que la différence entre les écritures qui interviennent repose sur la place des quantificateurs. Il y a donc un mélange entre les cadres de la Logique élémentaire et de la théorie des ensembles.

Réponse attendue :

$$\text{int}\left(\bigcup_{i=1}^5 A_i\right) = \text{int}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)$$

$$= \text{int}(A_1) \cap \text{int}((A_2) \cap (A_3) \cap (A_4) \cap (A_5)) \quad (\text{d'après une propriété de l'intérieur}).$$

IV.5. Question 5

La question 5 vise à cerner les conceptions des étudiants sur la topologie usuelle de $\mathbb{R}$. Nous pouvons nous attendre à une réponse telle que : la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ est une structure mathématique qui donne, pour l'ensemble des nombres réels, des définitions précises aux notions de limite et de continuité.

IV.6. Question 6

La question 6 porte sur les difficultés rencontrées par les étudiants dans l'enseignement de la topologie usuelle de la droite réelle et en particulier comment ils ressentent l'abstraction des notions et le formalisme utilisé. Nous pouvons nous attendre aux réponses suivantes : il y a beaucoup de notions nouvelles par rapport à celles rencontrées au secondaire, l'utilisation importante des notions de logique mathématique qui n'est pas développée au secondaire, les notions n'ont pas d'impact dans la vie, il y a trop de démonstrations, etc.

En définitive, le questionnaire teste les notions vues l'année précédente. Il n'introduit donc aucune nouveauté par rapport à l'enseignement de première année. Nous avons montré, dans le premier article, que les exercices proposés faisaient essentiellement travailler des notions d'ouverts et de fermés. Il en va de même pour les questions de notre enquête. Il s'agit d'un choix sur lequel nous nous sommes justifiés dans le premier article. Le but de l'enquête n'est pas de tester des connaissances ou techniques nouvelles, mais bien d'obtenir un état de lieux sur ce qui a été acquis en première année. Enfin, le questionnaire contient également deux questions (5 et 6) plus générales qui permettent aux étudiants de s'interroger sur la vision globale qu'ils ont de la Topologie en tant que contenu d'un cours et sur les difficultés qu'ils rencontrent.

V. Analyse a posteriori (résultats)

L'analyse a posteriori passe par les étapes suivantes :

- « - Présentation structurée des faits observés ;
 - Analyse didactique des phénomènes recueillis (décisions, effets de contrat, indices de fonctionnement de connaissances) ;
 - Analyse des erreurs et comportements erronés ;
 - Analyse de la gestion de la classe ;
 - Retour sur les formulations (consignes, énoncés, statuts des résultats, textes en mémoire) et leurs effets ;
 - Conclusion : retour sur la problématique didactique » (Henry, 2006).

Nous menons cette analyse sachant que nous ne sommes pas dans le statut de gestionnaire du cours d'Analyse 1 en Premier Graduat.

Nous scindons les résultats en deux parties. Dans la première, nous les présentons pour chaque question en expliquant comment le dépouillement des réponses a été fait. Nous soulevons ensuite dans la deuxième partie les aspects frappants et les erreurs rencontrées.

V.1. Résultats question par question

Question 1

Les réponses ont d'abord été classées en fonction des types de définitions mentionnées par les étudiants. En d'autres mots, nous commençons par regarder uniquement les objets auxquels les étudiants ont pensé dans leurs productions sans nous préoccuper des erreurs rencontrées. Nous indiquons ensuite le nombre de réponses correctes.

- Ensemble ouvert

Tableau 1 : Définitions des étudiants sur la notion d'ouvert

Objet utilisé	Nombre d'étudiants	Réponses correctes
Intervalle	17	13
Boule	3	1
Frontière	3	3
Complémentaire	4	4

- Ensemble fermé

Tableau 2 : Définitions des étudiants sur la notion de fermé

Objet utilisé	Nombre d'étudiants	Réponses correctes
Intervalle	17	13
Boule	3	1
Complémentaire	7	7

Nous remarquons que les définitions en termes de complémentaires sont toutes correctes pour l'ensemble fermé, les définitions en termes de frontières sont toutes correctes pour l'ensemble ouvert.

Dix-sept étudiants n'ont pas pu répondre à la question. Sur cinquante-neuf étudiants, seulement vingt-et-un ont correctement répondu à la sous-question (a), même constat pour la sous-question (b).

Nous aurions pensé que les étudiants répondraient facilement à cette question en utilisant par exemple pour un ouvert la définition suivante : $A \subset \mathbb{R}$ est un ouvert si $A = \text{int}(A)$. Malheureusement, certains ont fait recours à des définitions erronées telles que : « Soit A un ensemble, $a \in A$, A est ouvert si et seulement si $\exists r \in A$ tel que $A =]a-r, a+r[$ ». D'autres ne savent pas distinguer l'inclusion et l'appartenance, ils disent : « L'ensemble contient un élément » en lieu et place de « L'ensemble comprend un élément ».

Au premier l'article, l'analyse des exercices a montré que les tâches ne mènent pas nécessairement à la conceptualisation des objets manipulés. Par conséquent, l'étudiant ne dispose que de sa mémoire pour retenir ces définitions et comme les concepts topologiques ne sont plus retravaillés dans la suite du cours de première année, l'effet mémoire s'estompe et il n'est donc pas surprenant de trouver des erreurs ou une question de restitution des définitions sans réponse.

Question 2

Cinquante-neuf étudiants ont passé le test, nous devons récolter cent-soixante-dix-sept exemples d'ensembles ouverts et autant d'ensembles fermés.

- Exemples d'ensembles ouverts

Tableau 3 : Exemples d'ouverts

Intervalles	88
Ensemble $\mathbb{R}$	14

- Exemples d'ensembles fermés

Sur cent soixante-dix-sept exemples attendus, quatre-vingt-dix-neuf correctes sont donnés.

Tableau 4 : exemples de fermés

Intervalles	98
Singleton	1

Nous constatons que les exemples en termes d'intervalles sont nombreux.

En conclusion, la plupart des étudiants se servent du positionnement des crochets pour donner des exemples d'ouverts et de fermés. Ceci est source de certaines erreurs constatées chez certains étudiants, ils n'arrivent pas à ordonner les extrémités d'un intervalle, par exemple, un étudiant pense que $[-1, -2]$ est un fermé.

Rares sont les étudiants qui passent, par adhérence, de l'ouvert au fermé. Quatre étudiants n'ont pas pu répondre à la question et bien d'autres ont soit commis une erreur soit donné moins de trois exemples.

Question 3

a) Affirmation : « L'ensemble $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_o\right\}$ est fermé ».

cinquante-neuf étudiants répondent « faux ». Malheureusement toutes les justifications sont erronées. Un bon nombre d'étudiants n'arrivent pas à comprendre l'écriture $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_o\right\}$, ils pensent qu'ils ont affaire à un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ et se justifient par le fait que l'on peut trouver $x \in \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_o\right\}$ tel que $x \notin \mathbb{N}$.

Quatre étudiants sur les vingt-six ayant répondu « faux » n'arrivent pas à se justifier. Deux étudiants pensent que $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_o\right\}$ n'est pas un ensemble et un autre écrit : « $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_o\right\}$ est infini, c'est pourquoi il n'est pas fermé ».

b) Affirmation : « $[-4, 3[$ n'est ni ouvert ni fermé ».

Quarante-quatre étudiants répondent « vrai ». Deux étudiants ne répondent pas à la question et treize sont à côté. Un étudiant justifie son choix avec la notion d'intérieur pour nier que $[-4, 3[$ est un ouvert et la notion d'adhérence pour nier que cet ensemble est un fermé. Deux étudiants justifient leur réponse par des contre-exemples en termes d'intervalles. Quelques vingt étudiants disent que l'affirmation est vraie parce que $[-4, 3[$ est un intervalle semi-ouvert à droite ou semi-fermé à gauche. D'autres étudiants ne se justifient.

c) Affirmation : « $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ »

Quatorze étudiants répondent « vrai ». Huit ont donné des justifications erronées et six n'ont donné aucune justification. Vingt étudiants n'ont pas répondu à la question.

En bref, la plupart des étudiants n'arrivent pas à se justifier correctement. Une difficulté sur la théorie des ensembles se manifeste à la sous-question (a). A la sous-question (b), nous avons rencontré des justifications imprécises telles que : « $[-4, 3[$ n'est pas ouvert parce qu'il est fermé en -4 » et « $[-4, 3[$ n'est pas fermé parce qu'il est ouvert en 3 ». Ces étudiants relient

donc les notions d'ouverts et de fermés à la forme des crochets des intervalles et non au sens des concepts. La sous-question (c) paraît plus difficile aux yeux des étudiants parce que rien de spécial n'y est donné.

Question 4

Huit étudiants complètent correctement l'égalité (a) sans justification, vingt-huit complètent correctement l'égalité (b) dont un seul justifie en ces termes « $\bar{A} = [-2, 3]$ car $\bar{A}$ est un fermé ». Quant à la sous-question (c), aucune réponse n'est valable.

En conclusion, cette question est mal réussie. Il s'agit d'une question qui teste l'aptitude des étudiants à rédiger une preuve en manipulant le formalisme des définitions et en articulant des arguments de Logique et de la théorie des ensembles. Nous observons une dégradation pour ces égalités, vingt-trois étudiants ne parviennent pas à compléter l'égalité (a), quinze n'y arrivent pas pour (b) et vingt-sept s'abstiennent pour (c).

Question 5

Le tableau ci-dessous reprend les conceptions des étudiants sur la Topologie.

Tableau 5 : Conceptions des étudiants sur la Topologie

En quoi consiste la Topologie ?	Nombre d'étudiants
Étudier la connexion (liaison) des machines	12
Étudier les éléments d'un ensemble	3
Classifier l'espace	4
Établir les relations entre espaces topologiques	3
Étudier les intervalles	2
Étudier l'appartenance d'un élément à un ensemble	1
Décrire la topologie et la topologie logique du réseau	1
Concevoir les réseaux informatiques et leur gestion	4
Étudier la théorie des ensembles	10

Étudier les relations des positions dans l'espace	2
Étudier les propriétés des objets	2
Étudier la déformation de l'espace par des transformations continues	2
Étudier la représentation graphique	2
Étudier le lien entre espaces topologiques et réseaux informatiques	1
Pas de réponse	1

Un étudiant dit que l'objet de la topologie n'a pas été donné en première année.

En conclusion, les réponses reprennent surtout la l'interconnexion des machies, la théorie des ensembles, etc.. Le caractère outil de la Topologie est évoqué brièvement pour un réseau informatique. La Topologie est décrite en termes de contenus, les étudiants n'ont pas suffisamment de recul par rapport au cours pour s'interroger sur l'utilité de ce qu'ils étudient. Ce constat peut être mis en relation avec les difficultés d'enseignement de notions FUG : en première année, la Topologie est un point isolé dans le cours ; nous avons montré que les concepts topologiques restent au stade d'objets ; les tâches proposées consistent en la manipulation des définitions et c'est précisément ce côté manipulateur que nous retrouvons ici dans les réponses des étudiants.

Question 6

Les difficultés rencontrées par les étudiants sont reprises dans le tableau ci-dessous :

Tableau 6 : Difficultés rencontrées par les étudiants en Topologie

N°	Difficultés	Nombre d'étudiants
1.	Prérequis insuffisant	8
2.	Difficulté des démonstrations	2
3.	Maîtriser la diversité des définitions	1
4.	Temps réduit pour la pratique	4
5.	Méthode à appliquer	1

6.	Comprendre le langage mathématique et les écritures quantifiées	4
7.	Absence des exemples de la vie courante	5
8.	Manière d'enseigner	4
9.	Abstraction	1
10.	Manque d'ouvrages	2
11.	Théorèmes et intervalles	1
12.	Mémorisation des formules et des méthodes	2
13.	Pas d'économie de pensée	2
14.	Les intégrales	2
15.	Les axiomes	1
16.	Pas de réponse	16

En conclusion, beaucoup de difficultés sont données en termes de quantité de notions à maîtriser : définitions, méthodes, démonstrations. Nous observons aussi que la quasi-totalité de difficultés relèvent de la manipulation des objets. Elles sont internes à la Topologie malgré la caractère outil de ce domaine des mathématiques évoqué brièvement au type 14 de difficultés.

Les difficultés observées peuvent être reliées au diagnostic établi dans le premier article. Nous avons effectivement montré que les définitions sont données en faisant intervenir différents objets et que les exercices portent sur la manipulation de ces définitions. Nous retrouvons bien cet aspect manipulateur.

VI.2. Étude longitudinale

Nous analysons ici les productions individuelles de quatre étudiants pris au hasard.

Étudiant 6

Cet étudiant ne répond pas à la question 1, pourtant il arrive à répondre correctement à la question 2 ; il donne trois exemples d'ouverts et trois de fermés. Cette copie est particulière pour le côté surprenant de la traduction d'une définition en exemples alors que l'on est incapable de la restituer.

Les exemples sont donnés en termes d'intervalles. A la question 3, affirmation (b), le même étudiant répond « faux » ce qui n'est pas un bon choix de réponse. A la question 4, même s'il n'arrive pas à se justifier, il complète brutalement les égalités (a) et (b) et tombe sur la bonne réponse.

Quant à la question 5, il répond en ces termes : « La topologie consiste à relever ou à connecter plusieurs machines à un serveur ». Il y a ici une confusion entre le sens en Informatique (réseaux informatiques) et en Topologie. A la question 6, il n'arrive pas à donner les difficultés qu'il accuse en Topologie.

En résumé, cet étudiant est capable de manipuler les ouverts et les fermés sans restituer leurs définitions. Il a une certaine compréhension des concepts d'ouverts et de fermés comme le montrent ses exemples. Sa connaissance porte non sur le sens des concepts mais sur la forme des intervalles qui en sont le repère.

Étudiant 15

En regardant la copie de cet étudiant, il arrive à répondre à la question 1 en se servant de la notion de complémentaire. L'étudiant répond correctement à la question 2 mais sans faire recours à ses définitions données à la question 1. Nous pensions qu'il se servirait de complémentaires des ouverts donnés à la sous-question (a) pour trouver les fermés à la sous-question (b). Il choisit « vrai » à la sous-question (3b), mais sa justification est imprécise.

Il ne satisfait pas à la question 4 et pense à la question 5, que la Topologie s'intéresse plus précisément aux espaces topologiques et aux applications qui les lient. Elle aide aussi dans le cas de réseaux. A la question 6, il ne dit rien.

En résumé, cet étudiant est capable de restituer les définitions et de manipuler un peu le formalisme. A la question 2, un exemple d'ouverts est donné en intervalle défini en compréhension et tous les exemples des fermés sont donnés en termes d'intervalles définis en compréhension. A la question 3, il fait le bon choix aux questions (a) et (b), mais ses justifications sont erronées. A la question 4, il n'arrive pas à appliquer ses définitions et réussit à aucune sous-question.

Étudiant 24

En parcourant la copie de cet étudiant, nous constatons qu'il répond à la question 1 en se servant des définitions d'intervalles ouverts et fermés. Ses exemples donnés à la question 2 ne sont pas tous corrects, l'ordre est en souffrance dans certaines écritures.

A la question 3, le choix de réponse à la sous-question (b) est bien opéré et l'étudiant se justifie correctement par un contre-exemple pour l'ouvert et par un autre pour le fermé. Par

contre, l'égalité (b) de la question 4 est complétée sans preuve. Il répond à la question 5 en ces termes : « La Topologie est l'étude des propriétés des objets qui sont conservés par déformation continue ». Ce qui est une très bonne réponse. Il n'arrive pas à répondre à la question 6.

En résumé, cet étudiant est capable de restituer les définitions mais les connaissances en jeu pour les manipuler ne sont pas disponibles, comme nous pouvons l'observer à la question 2 où certains exemples donnés témoignent le manque de maîtrise de la notion d'ordre. La fait de ne pas pouvoir dépasser le stade de la restitution implique que cet étudiant est incapable de résoudre un exercice avec suffisamment de précision et de rigueur mathématique. Les questions générales sont un cauchemar pour lui.

Étudiant 51

A la question 1, cet étudiant se réfère aux intervalles pour restituer les définitions des ensembles ouverts et fermés. Il s'appuie sur ces définitions et répond correctement à la question 2. A la question 3, affirmations (a) et (b), il opère un bon choix de réponse mais n'arrive pas à se justifier correctement. L'étudiant ne répond pas à la question 4, à la question 5 nous résumons sa réponse en ces termes : « L'objet de la Topologie n'a pas été donné en première année ». A la question 6, il dit qu'il n'arrive pas à concilier ce qu'il apprend avec la pratique.

En résumé, cet étudiant est capable de restituer tant soit peu les définitions et de manipuler le formalisme. Il y a donc un côté manipulateur très présente et qu'on retrouve d'ailleurs dans la rédaction des réponses à la question 2. Quant à la question 4, l'étudiant n'arrive pas à appliquer les définitions et pour preuve aucune réponse n'est mentionnée sur sa copie.

En ramassant les productions de ces quatre étudiants, nous avons observé des phénomènes très différents sur chaque copie. Cette étude longitudinale montre qu'au terme d'un même enseignement, les étudiants réagissent de façon très différente. En ce qui concerne le rapport entre le formel et le conceptuel, tout se passe comme si finalement, la manipulation du formalisme, qu'elle soit correcte ou pas, ne permet pas de donner du sens aux notions.

VI.3. Interprétation des résultats

Les résultats ont montré que les connaissances en Topologie des étudiants de deuxième année sont moins stables, elles sont peu disponibles. La plupart de définitions en termes d'intervalles, de frontière et de complémentaires sont correctement écrites (cf. tableaux 3 et 4). Cependant, nous avons repéré des erreurs dans les autres types de définitions chez

beaucoup d'étudiants. Ainsi, des problèmes surgissent déjà dans la restitution des définitions : l'appartenance est confondue à l'inclusion, le référentiel est al choisi pour un élément, la notion d'ordre presque inexistante, des quantificateurs sont mal placés ou absents.

Les étudiants ne s'interrogent pas sur leurs écritures, mais par contre, certains sont capables de manipuler une écriture quantifiée qui n'a pas de sens. L'aspect manipulation est présent chez les étudiants et nous avons observé, notamment dans notre étude longitudinale, que cette fonction manipulateur du formalisme n'est pas associée à une prise de sens.

La plupart des étudiants ne parviennent pas à se justifier dans leur choix de réponse. Nous avons relevé beaucoup d'imprécisions dans les productions des étudiants. Ces imprécisions se retrouvent dans les écritures utilisées mais aussi dans les démarches : par exemple, ils ne prennent pas la peine de rappeler les définitions avec lesquelles ils travaillent, ils se lancent directement dans l'exercice sans expliquer rigoureusement ce qu'ils vont montrer, ni ce qu'ils vont utiliser pour y parvenir.

Conclusion

Les résultats auxquels nous sommes arrivés peuvent, selon nous, être mis en rapport avec la nature FUG des concepts topologiques mais aussi avec le diagnostic de l'enseignement de première année en sciences mathématiques posé dans le premier article. Nous y avons montré que les concepts topologiques sont écrits dans un formalisme qui induit des difficultés liées à l'utilisation des quantificateurs, le mélange des cadres de la Logique élémentaire et de la théorie des ensembles, la variété des définitions (les concepts sont définis de plusieurs façons). Dans le cours théorique, ces concepts sont destinés à être manipulés pour prouver une série de propriétés sur les notions d'intérieur, d'adhérence, d'ouvert, de fermé, etc. Les étudiants sont donc confrontés à une longue liste de notions à comprendre et à retenir. Cette difficulté est citée à la question 6. Nous avons aussi montré que les exercices consistent à manipuler les définitions et que ce travail sur le formalisme développe un côté manipulateur qui n'est pas associé à une prise de sens, donc à la conceptualisation des notions. L'absence de sens implique que les étudiants ne disposent finalement que leur mémoire pour retenir les définitions, sachant que la fonction mnémonique est exponentiellement décroissante. Au fil des temps, ils manipulent les notions de façon imprécise tout en étant cependant capables de retenir de façon imparfaite des raisonnements standards utilisés dans les exercices.

Le dépouillement du questionnaire a montré que la manipulation du formalisme en première année n'a pas mené à la prise de sens des objets. De plus, cette manipulation n'est correcte que chez peu d'étudiants et surtout lorsque les écritures sont simples, pas lorsque les données sont trop générales comme à la question 4 de l'enquête.

Les difficultés révélées par les étudiants peuvent se résumer en :

- Le prérequis insuffisant ;
- Le temps réduit pour la pratique ;
- Le langage mathématique ;
- La quantité de notions à maîtriser (définitions, méthodes, démonstrations) ;
- L'abstraction des notions.

Ces difficultés rejoignent en dehors du temps réduit de la pratique celles qui sont liées à la nature FUG des notions de topologie. Ces difficultés étant inventoriées et connues, il ne nous reste plus qu'à mettre en place un dispositif permettant l'acquisition des premières notions de Topologie, dispositif à expérimenter.

Bibliographie

I. Ouvrages

- [1]. Charnay, R. (2003). « L'analyse a priori, un outil pour l'enseignant », *Math-Ecole*, n° 209, Université de Genève (consulté le 10 novembre 2021 sur le site *Math-Ecole*, http://ssrdm.ch/mathecole/crbst_19.html).
- [2]. Charnay, R. & Mante, M. (2006), *Mathématiques. Epreuve écrite d'admissibilité. Tome 2*. Paris, Hatier (coll. Hatier Concours).
- [3]. Henry, M. (2006). Analyse des situations didactiques. Cours Michel Henry, IREM de Besançon.
- [4]. Jordan C. (1893). *Cours d'Analyse*, t.1, seconde édition, Gauthier-Villars, Paris, 636p.
- [5]. Lipschutz, S.(1999). *Topologie, cours et problèmes*, Série Schaum. Traduit par M. LOBENBERG, Chiron, France, 260p.
- [6]. Mubenga Kampotu (1976). *Eléments d'analyse infinitésimale. Vol.1. Les fondements*, Presses Universitaires du Zaïre, Rectorat, Kinshasa.
- [7]. Revuz A. et G. (1966). *Cours de l'APM, éléments de Topologie*, t. III, APMEP, Paris, 248p.
- [8]. Schwartz L. (1967). *Cours d'Analyse*, Hermann, Paris, 830p.

II. ARTICLES SCIENTIFIQUES

- [9]. Bridoux S. (2009). Une séquence d'introduction des notions de Topologie dans $\mathbb{R}^n$: de la conception à l'expérimentation. *Actes du colloque EMF 2009*, Université de Dakar, Sénégal, pp. 988-1001.
- [10]. Douady R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil/objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 7/2, La Pensée Sauvage, Grenoble, pp.5-31.
- [11]. Douady R. (1994). Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir, *Repères-Irem*, n° 15, Topiques Editions, France, pp. 1-25.
- [12]. Pian J. (sd). Diagnostic des connaissances de Mathématiques des étudiants de CAPES, vers une interprétation cognitive des apprentissages individuels, *Cahier de Didirem*, n° 34, Irem Paris 7, France, pp. 1-446.
- [13]. Robert A. (1998). Outils d'analyse des contenus à enseigner au lycée et à l'université, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 18/2, Université de Cergy-Pontoise, La Pensée sauvage, Grenoble, pp. 139-190.
- [14]. Robert A. (2005). Deux exemples d'activités en formation des enseignants de Mathématiques du second degré, *Petit x*, n° 67, IUFM Versailles, France, pp. 63-76.
- [15]. Robert A. et Rogalski M. (2004). Problèmes d'introduction et autres problèmes de recherche au lycée, *Repères-Irem*, n° 54, France, pp. 78
- [16]. Vergnaud G. (1990). La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 10/2-3, Université de Rennes, France, pp. 133-170.

III. NOTES DE COURS

- [17]. Ntantu D., Notes de cours d'Analyse I, G1 Mathématique-Informatique, Université Pédagogique Nationale, Kinshasa, 2013-2014, 136p.
- [18]. Ntantu D., Notes de cours d'Analyse I, G1 Mathématique-Informatique, Université Pédagogique Nationale, Kinshasa, 2018-2019, 145p.