

ETUDE COMPARATIVE ENTRE LA METHODE DU REPERE PREFERENTIEL DE DOMINANCE ET LA METHODE DU REPERE PREFERENTIEL DE DOMINANCE GENERALISEE DU POINT DE VUE DE LA COMPLEXITE ALGORITHMIQUE

par

KIKOMBA KAHUNGU Michael *, ***
MABELA MAKENGO Rostin **, ***
LUTUMBA NKANGA Darcy ***

* Département de Mathématique Informatique, Section de sciences exactes, ISP/Gombe, R.D. Congo

** Département de Mathématique Informatique, Faculté de sciences, UNIKIN, R.D. Congo

***Centre de Recherche sur l'Enseignement de la Mathématique «CREM»

RESUME

Dans cet article, nous proposons un tour d'horizon des méthodes proposées dans la littérature par OKITONYUMBE F. et KIKOMBA K. pour l'optimisation multicritère des problèmes combinatoires sous l'angle de trois problématiques opérationnelles :

La génération de l'ensemble de Pareto, la recherche d'une solution de compromis et l'exploration interactive de l'ensemble de Pareto. Nous présentons dans un premier temps les deux méthodes existantes dans la littérature en mettant l'accent sur le problème d'affectation.

Mots clés : La MRPD, la MRPDG, problème multicritère d'affectation.

ABSTRACT : In this article, we provide an overview of the methods proposed in the literature by OKITONYUMBE and KIKOMBA for the multicrite optimization of combinatorial problems under the angle of three operational problems: the generation of Pareto sets, the search for a compromise solution and the interactive exploration of de Pareto set. We therefor first present the two existing methods in the literature with an emphasis on the assignment problem.

Keywords : The MRPD, the MRPDG Multicriteria assignment problem.

Introduction

Les besoins de l'homme étant insuffisants dans l'univers où il est placé, ce dernier souffre d'un manque de ressources susceptibles afin de les satisfaire. D'où l'importance de la

théorie de l'optimisation pour l'affectation de ses besoins multiples c'est-à-dire la minimisation des coûts et certaines charges, et la maximisation de son revenu.

Le problème d'affectation figure parmi les neuf problèmes classiques d'optimisation combinatoire et nécessite des méthodes appropriées pour sa résolution. En effet, il n'est pas restrictif de résoudre sa relaxation linéaire puisqu'il vérifie la propriété de totale unimodalité.

En considérant le réseau sans trafic, notre problème consiste à affecter les demandes de chaque paire origine-Destination sur le chemin qui minimise le critère global.

La complexité de notre problème est liée à la non séparabilité des coûts qui rend l'affectation dépendante de l'ordre dans lequel on traite les diverses paires origine-destination. La prise en compte de plusieurs objectifs dans le problème d'affectation et la présence des variables discrètes, génèrent une nouvelle difficulté surprenante.

Ainsi d'après certains auteurs. Il n'existe pas d'autres principes de résolution que l'algorithme trivial d'énumération des points de l'espace d'état en supposant que le problème est NP-complet. Néanmoins ce problème peut être résolu par des nouvelles méthodes proposées par OKITONYUMBE et KIKOMBA basées sur la nouvelle caractérisation des solutions efficaces. D'où l'importance d'une étude comparative de ces deux méthodes.

A travers cet article, nous rendons visible l'efficacité de la Méthode du Repère Préférentiel de Dominance et la Méthode du Repère Préférentiel de Dominance Généralisée compte tenu de leur complexité algorithmique. Il s'agit de la détermination des solutions efficaces sans fonction scalarisante.

I. PROBLEME D'OPTIMISATION MULTI-OBJECTIF

Mathématiquement, un problème d'optimisation multi-objectif est décrit comme suit :

Optimiser $f(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)]$ (n contraintes à optimiser)

avec $g(x) \leq 0$ (n contraintes d'égalités)

et $h(x) = 0$ (p contraintes d'égalités)

où $x \in \mathbb{R}^n$, $g(x) \in \mathbb{R}^m$ et $f(x) \in \mathbb{R}^k$

La résolution de ce problème consiste à minimiser au mieux ces n fonctions objectif dans le but de ne pas trop dégrader les valeurs des optima obtenues par rapport à ceux obtenus lors d'une optimisation mono-objectif effectuée objectif par objectif

Remarque : $f_1, f_2, \dots, f_k$ désignent les différents objectifs à optimiser. Les variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ représentent les variables de décision.

L'évaluation d'une solution x est décrite par un vecteur objectif :

$f(x) = [f_1(x), \dots, f_k(x)]$. D'où, on est en face de deux types d'espaces :

- L'espace de décision X de dimension n qui désigne l'ensemble des solutions $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$
- L'espace des objectifs de dimension k qui désigne l'ensemble des évaluations possibles correspondant aux vecteurs objectif $f(x)$ [2][4].

II. RELATION D'ORDRE ET DE DOMINANCE

La relation de dominance nous permet de restreindre l'ensemble des solutions de compromis. Dans la littérature, on retrouve plusieurs relations de dominance. Néanmoins, la plus utilisée est la dominance au sens de Pareto qui est définie par :

Le vecteur u domine le vecteur v ssi :

u est au moins bon que v au regard de tous les objectifs et u est strictement meilleur que v pour au moins un objectif.

Pour définir clairement et formellement cette notion de dominance au sens de Pareto, les relations $=$, $\leq$ et $<$ usuelles sont étendues aux vecteurs.

III.1. Définition

Considérons u et v deux vecteurs de même dimension $u = (u_1, \dots, u_m)$ et $v = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ alors

$$u = v \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, m\}, u_i = v_i$$

$$u \leq v \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, m\}, u_i \leq v_i$$

$$u < v \Leftrightarrow u \leq v \wedge u \neq v$$

Les relations $\geq$ et $>$ sont définies de manière analogue

III.2. DOMINANCE AU SENS DU PARETO

Soient u et v deux vecteurs de décision, $u = (u_1, \dots, u_m)$ et $v = (v_1, \dots, v_m)$

Considérons un problème de minimisation :

$$u \text{ domine } v \Leftrightarrow f_{(u)} < f_{(v)}$$

$$u \text{ domine faiblement } v \Leftrightarrow f_{(u)} \leq f_{(v)}$$

$$u \text{ est incomparable (non dominé) avec } v \Leftrightarrow \text{not } [f_{(u)} \leq f_{(v)}] \wedge \text{not } [f_{(v)} \leq f_{(u)}]$$

Pour un problème de maximisation, ces relations sont définies de manière symétrique [5].

III. FONCTION SCALARISATANTES

S'il semble naturel de restreindre la considération des solutions efficaces comme des solutions puissantes de compromis satisfaisants, ceci ne ressort cependant pas le problème de décision proprement dit qui exige de classer une solution unique de meilleurs compromis. Cette solution impose une information complémentaire relative à la structure de favoritisme du décideur [3][4].

Une information peut se traduire en termes de paramètres de préférence. Les plus courants sont : Les poids, les taux de substitution et les points de référence qui servent en général à agréger les différents critères en une fonction exclusive. Ces fonctions d'agrégation sont appelées fonctions scalarisantes.

1. Les poids λ_k ($k = 1, \dots, k$) qui reproduisent l'impact relatif de chaque critère. Le plus souvent ils sont normés.

$$\sum_{k=1}^k \lambda_k = 1, (\lambda_k \geq 0);$$

2. Les points de référence qui représentent des points de $\mathbb{R}^k$ dont les coordonnées sont les valeurs recherchées de différents critères.
3. Les taux de substitution qui expriment l'idée de contrepartie entre une perte sur un critère et un gain sur un autre

Théoriquement, une fonction scalarisante doit être telle :

- que son optimisation conduit toujours à caractériser une solution efficace ;
- que toute solution efficace correspond à son optimisation pour certaines valeurs des paramètres de préférence.

Du point de vue pratique, il convient bien sûr que son optimisation soit relativement aisée. Les trois fonctions scalarisantes les plus courantes sont : S_1 , S_2 et S_3 . Elles utilisent toutes les poids λ_k comme paramètres de référence, et pour les deux dernières, un point de référence $\bar{Z}$ défini par les coordonnées $\bar{z}_k = M_k - \varepsilon_k$;

$k = 1, \dots, K$ où ε_k est une valeur positive arbitrairement petite :

- La somme pondérée $S_1(z, \lambda) = \sum_{k=1}^K \lambda_k z_k$
- La distance pondérée de Tchebychev

$$S_2(z, \lambda, \bar{z}) = \max(\lambda_k |z_k - \bar{z}_k|) \quad k = 1, \dots, K$$
- La distance pondérale augmentée de Tchebychev

$$S_3(z, \lambda, \bar{z}) = \max[(\lambda_k |z_k - \bar{z}_k|) + \rho(\sum_{k=1}^K |z_k - \bar{z}_k|)] \quad \rho > 0 \text{ et } k = 1, \dots, K$$

Signalons en passant que la minimisation d'une distance de Tchebychev conduit à un problème du type "min max".

$$\text{Min max} [\lambda_k |z_k - \bar{z}_k| + \rho \sum_{k=1}^K |z_k - \bar{z}_k|] \quad k = 1, \dots, K$$

IV. PROBLEME D'AFFECTATION

V.1. Définition et formulation

Le problème consiste à affecter n personnes à n tâches (affectation des contrôleurs dans les secteurs affectation des ouvriers dans des machines, ...)

Notons C_{ij}^k le coefficient du k^e critère. Ces valeurs peuvent être un coût d'affectation de i à j ; une durée d'affectation, une compétence, une expérience, un indice de préférence exprimé par un

contrôleur i . Le problème MOAP s'écrit donc :

$$\begin{cases} \text{«min » } z_k(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij}^k x_{ij} & k = 1, \dots, K \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = 1 & j = 1, \dots, n(1) \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 & i = 1, \dots, m(2) \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ est affecté à } j \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

Les autres contraintes indiquent qu'une tâche est effectuée par un et un seul contrôleur et réciproquement [1][5].

V. METHODE DU REFERE PREFERENTIEL DOMINANCE GENERALISEE [1][2].

Pour résoudre le problème multicritère d'affectation par la MRPDG, on procède comme dans [4], à la seule différence qu'on additionne avant toutes les opérations, les différents coûts en tenant compte de la dimension du réseau avant de mettre en place la matrice de nuage du fait que le trafic varie simultanément dans un espace à deux dimensions : la paire origine- destination.

Dans [4], les O_i sont affectés dans M_j c'est-à-dire le nombre d'ouvriers vaut le nombre des machines. Néanmoins, dans la nouvelle méthode que nous proposons, les C_{ij} , sont affectés dans S_j c'est-à-dire le nombre de contrôleurs est supérieur au nombre de secteurs.

VI.1. ETUDE DE LA COMPLEXITE ALGORITHMIQUE

Outre les opérations décrites pour la MRPD, on doit effectuer pour chaque point du nuage formé, une sommation des coûts (abscisse) et une sommation des compétences (ordonnée). Comme il y a n éléments C_{ij} , pour n secteurs, le nuage sera formé de n^2 points. Le nombre total de sommations sera donc de $2n^2$. Ainsi, la complexité de la MRPDG est de $O(3n^2 + n + 1) + O(2n^2) = O(n^2)$

VI. METHODE DU REPERE PREFERENTIEL DE DOMINANCE

Cette méthode tire son origine du théorème de contact [1].

Soit un vecteur $y \in O$. Si y est une solution efficace pour un problème d'optimisation combinatoire multi objectif, alors $(\bar{C} + \{y\}) \cap O = \{y\}$

VII.1. APPLICATION DE LA MRPD POUR LA RESOLUTION DES PROBLEMES MULTI- CRITERE D'AFFECTION

On procède comme suit :

- Déterminer le nuage des points en attribuant des valeurs à chaque objectif ;
- Appliquer, autant de fois que possible, la MRPD sur ce nuage de points pour engendrer, par échelon, les ensembles des solutions efficaces $E_i(P)$
- Construire les affectations potentiellement efficaces avec les $E_i(P)$ en donnant priorité aux indices i les plus petits.
- Filtrer les affectations ainsi construites en appliquant une fois de plus la MRPD pour générer $E(P)$

VII.2. ETUDE DE LA COMPLEXITE ALGORITHME DE LA MRPD

Si l'espace de décision réalisable D est composé des n éléments dans le pire de cas, nous avons :

- Pour déterminer $0 = F(D)$, on a $n \leq m$ ou $m \leq n$. Dans l'un ou l'autre cas, $n \times m$ où on a : $O(n^2) + 1$.
- Représentation de chaque solution dans l'espace des objectifs : $O(n^2)$
- Dans le pire cas, la boucle interne : $n(n - 1) = O(n^2)$.
- Dans le pire cas, à la sortie de la grande boucle : Cardinal de $E(P) = \text{Cardinal de } 0 = n$. La complexité de la dernière boucle est donc de $(n - 1)$ dans le pire cas soit $O(n^2)$

En somme la fonction de complexité s'écrit :

$O(n^2) + 1 + O(n^2) + O(n^2) + O(n) = O(3n^2 + n + 1) = O(n^2)$. Donc la complexité est polynomiale.

Conclusion

A travers cet article, nous venons de prouver l'efficacité pratique de la MRPD et MRPDG sur l'optimisation simultanée de problème d'affectation.

La comparaison prouve à suffisance que les deux méthodes ont la même complexité algorithmique.

Les deux méthodes ont pour fondement le théorème de contact de collecte Yann et Patrick Suarry. Contrairement aux auteurs qui pensaient qu'il n'existe pas d'autre principe de révolution que l'algorithme trivial d'énumération des points de l'espace d'état, en supposant que le problème est NP-complet.

Nous venons de prouver que ce problème peut être résolu par d'autres méthodes basées non seulement sur les fonctions scalarisantes. La MRPD et la MRPDG nous permettent de déterminer les solutions efficaces sans fonctions scalarisantes.

Bibliographie

- [1]. KIKOMBA M et al. Simultaneous optimization : Sectorization and Congolese air traffic assignment by the method of preferential reference of dominance. International Journal of Scientific and Innovative Mathematic Research , IJ – SIMR, vol 4, Issue 2, pages 29 – 41, February 2016.
- [2]. OKITO NYUMBE J.Y.F and ULUNGU B. EL (2013), sur le théorème de contact de collecte et Suarry, revue Bukulu bwa Tomanyi REBUTO/R.D.C, N°39(2013) 22-30
- [3]. OKITONYUMBE et al : Solving multi objective assignment problem and multi object knapsack problem by dominance preferential mark method, MPRA, December, 2014
- [4]. Vincke Ph, Aide multicritère à la décision, Edition de l'université de Bruxelles, 1989
- [5]. Yann collecte et P Suarry : optimisation multi objectif : Edition, Eyrolles, Paris 2002

