

ACQUISITION DE PREMIERES NOTIONS DE TOPOLOGIE AU DEBUT DU GRADUAT EN MATHEMATIQUES A L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET UNIVERSITAIRE. CAS DU PREMIER GRADUAT DES ETUDES EN MATHEMATIQUES

Par

KAPENGA KAZADI NTUNDULA Jean-Marie^{*, **}
LOWOLO OKAKO PENE ELUNGHA Sylvain^{*, **}

* Centre de Recherche sur l'enseignement de Mathématique.

** Département de Mathématiques et informatique, Faculté des sciences, Université Pédagogique Nationale.

RESUME

Cet article présente l'organisation, l'état de l'enseignement de la topologie au début du Graduat¹ en mathématiques en vue de cerner les difficultés y rencontrées par les étudiants et proposer un dispositif contenant des indications méthodologiques dans la simplification des difficultés des étudiants.

Mots-clés

Notions de topologie – formalisme – symbolisme – statut des notions à enseigner – notions FUG – registres d'écritures – pratiques mathématiques – cadre outil/objet – mises en fonctionnement.

ABSTRACT

This paper presents the organization, the state of teaching topology at the beginning of the graduate in mathematics and proposes the difficulties encountered by the students and proposes a device containing methodological indications in the simplification of the students difficulties.

Introduction

¹ Le niveau Graduat en République démocratique du Congo correspond à la Licence dans le système S

Au fil des années d'enseignement des mathématiques dans différentes institutions de l'ESU, nous avons constaté que l'enseignement de la topologie est une de sources de nombreux problèmes de compréhension pour les étudiants.

Cet enseignement commence dès la première année de Graduat dans le cours d'Analyse 1. Le constat fait et la réalité vécue nous poussent à nous poser les questions suivantes :

- Quelles sont les spécificités des concepts enseignés ?
- Quelles sont les difficultés réelles des étudiants en Topologie au début du Graduat ?
- Quelles sont les perspectives d'acquisition de premières notions de Topologie ?

Dans cet article provenant de ce questionnaire, nous cherchons à épinglez les difficultés rencontrées par les étudiants dans leurs premiers pas en Topologie et à provoquer les conditions susceptibles à la réduction de ces difficultés, d'une part en nous donnant les moyens de mieux comprendre les causes et d'autre part, en réfléchissant sur deux aspects importants de l'apprentissage : le sens et l'utilisation des notions topologiques enseignées.

Le questionnaire évoqué ci-haut nous pousse à émettre l'hypothèse que les notions de topologie sont porteuses d'un formalisme nouveau tant sur le plan du symbolisme utilisé que sur leur utilisation dans les écritures complexes et sont génératrices de sérieux problèmes d'apprentissage aux étudiants. Ainsi pour réduire les difficultés des étudiants, le recours aux perspectives d'acquisition suivantes s'impose : un travail sur les registres d'écritures, un travail en réseaux de concepts et les commentaires métamathématiques.

Cet article s'articule présente d'abord l'état de la question pour établir les contours de notre recherche, ensuite la méthodologie utilisée et enfin l'analyse de l'enseignement de la Topologie en Premier Graduat.

II. ETAT DE LA QUESTION

La lecture des travaux antérieurs ainsi que des documents sur la théorie se rapportant au thème sous examen est un atout dans une recherche. Ce travail s'inscrit dans la continuité de plusieurs travaux et résultats en didactique des mathématiques et plus particulièrement sur la thèse de Stéphanie Bridoux (2011). Dans ce travail, l'auteur, partant d'un constat d'échec ressenti durant plusieurs années concernant un enseignement de topologie dans lequel elle a pris part active, en première année d'université, s'est donné comme objectif de développer des pistes d'enrichissement, voire de modifications de cet enseignement susceptibles de conduire aux acquisitions visées tout en s'inscrivant dans les contraintes institutionnelles qui le délimitent strictement. Partant d'une étude épistémologique de la genèse et du développement de plusieurs notions de topologie, elle a pu caractériser les aspects formalisateur, unificateur et généralisateur de ces notions. Son étude, complétée par une analyse comparative de quelques manuels, a contribué à la construction d'un scénario d'enseignement intégrant un certain nombre de leviers didactiques susceptibles de favoriser les apprentissages en topologie des étudiants, en tenant compte toutefois des contraintes déjà signalées. Se plaçant dans le cadre de la théorie de l'activité spécifiée aux mathématiques, elle a explicité la description de son scénario en termes de tâches et

d'activités attendues chez des étudiants, avant de l'expérimenter dans sa classe. Les analyses des déroulements en classe associées à celles des productions des étudiants aux différentes évaluations ont permis d'approcher les apprentissages en topologie effectivement réalisés par les étudiants, en relation avec la nature des tâches. Elle a observé une diminution significative des échecs dans les tâches de manipulation des définitions. Mais, elle a constaté chez les étudiants un manque d'une certaine disponibilité des notions topologiques dans les tâches plus complexes qu'elle a pu associer à son scénario.

En rapport avec les démonstrations des théorèmes rencontrés par les étudiants sur ces notions, leurs apprentissages, leurs pratiques et les outils proposés, Aline Robert (1998), dans ses outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université, dit ceci : « il s'introduit dans les mises en fonctionnement nécessaires aux démonstrations une certaine complexité, dans la mesure où souvent il ne s'agit plus de juxtaposer assez systématiquement des applications simples ou des théorèmes du cours mais bien de faire intervenir simultanément plusieurs éléments, de les combiner ou d'effectuer des choix ou de changer de point de vue ou encore d'adapter des outils de manière un peu nouvelle, éventuellement dans de nouveaux types de problèmes. Il y a plusieurs initiatives à prendre s'il y a à faire des modifications non indiquées par exemple ».

Pour ce qui est des apprentissages et des pratiques, souvent, l'étudiant est confronté à de nouvelles demandes en matière de pratiques mathématiques. Par exemple, un théorème possède en général beaucoup d'applications qui ne sont pas toutes envisagées en classe. Un enseignant peut attendre que ces différentes possibilités d'application soient pourtant à la disposition de l'étudiant. Celui-ci doit aussi pouvoir intégrer des connaissances déjà rencontrées dans l'introduction de nouvelles connaissances. Autrement dit, il devrait pouvoir intégrer le nouveau dans l'ancien, sans oublier ce dernier. Or, des travaux de J. Pian² sur les productions des étudiants préparant le CAPES³ ont montré que, souvent, les étudiants n'ont à leur disposition que des savoirs juxtaposés, ils savent surtout les utiliser si les applications sont isolées et indiquées⁴. Ces travaux montrent aussi que les connaissances élémentaires ne sont pas non plus disponibles. Mais qu'elles sont cependant correctement utilisées sur demande.

En ce qui concerne les outils proposés, les descriptions précédentes sont utilisées pour dégager quatre dimensions d'analyse permettant d'accéder à la complexité des mathématiques qui nous concernent ici (A. Robert, 1998) :

- 1) la dimension outil/objet des notions (R. Douady, 1986) ;
- 2) le statut des notions à enseigner quant à leur insertion dans le paysage des élèves.

Aline Robert distingue, pour les notions à enseigner, les statuts suivants :

² J. Pian (1999). Diagnostic des connaissances des mathématiques des étudiants de CAPES, vers une interprétation cognitive des apprentissages individuels. *Cahier de DIDIREM*, n° 34, Irem, Paris.

³ CAPES : Certificat d'Aptitude au Professorat de l'Enseignement du second degré.

⁴ Ce sont des applications immédiates de théorèmes, propriétés, formules, ... Il n'y a pas d'étape à envisager.

- Les notions qui peuvent être présentées aux élèves directement comme des extensions de notions déjà introduites ;
- Les notions qui peuvent être présentées aux élèves comme réponses à de nouveaux problèmes précis ;
- Les notions qui ne correspondent qu'à l'introduction d'un nouveau formalisme ;
- Les notions formalisatrices, unificatrices et généralisatrices, en abrégé « notions FUG » : ce sont des notions qui présentent une unification des notions précédentes, nécessairement associées à une généralisation grâce à un nouveau formalisme. En général, ces notions ont des caractéristiques épistémologiques qui tiennent à une genèse très longue, le passage des notions primitives à leur génération a été très long et sinueux. Leur enseignement présente donc des difficultés d'introduction. A priori, il est plus difficile d'introduire des concepts qui sont éloignés des connaissances antérieures que des concepts pour lesquels la distance entre ancien et nouveau est plus réduite ;

3) Les niveaux de conceptualisation

Un niveau de conceptualisation est un palier dans un champ de connaissances mathématiques correspondant à une organisation cohérente d'une partie de champ. Cette organisation est caractérisée par des objets mathématiques, présentés d'une certaine façon, des théorèmes sur ces objets, des méthodes associées à ces théorèmes du niveau considéré et en utilisant ces méthodes (Dorier,1997). Cette dimension en termes de niveau de conceptualisation permet d'observer, pour une même notion, les imbrications successives ;

4) Les niveaux de mises en fonctionnement des connaissances par les élèves.

A. Robert distingue trois niveaux de mises en fonctionnement :

- Le niveau technique : ce niveau correspond à des mises en fonctionnement indiquées, isolées. Il s'agit d'applications immédiates de théorèmes, définitions, ... Ce sont donc des contextualisations simples, locales et sans étapes.
- Le niveau de connaissances mobilisables⁵ : les mises en fonctionnement sont encore indiquées mais on dépasse l'application simple d'une propriété à la fois. Il existe, à ce niveau, un début de juxtaposition des savoirs dans un domaine donné, une certaine organisation. Ce qui est en jeu reste cependant explicite.
- Un niveau de connaissances disponibles : à ce niveau, l'étudiant est capable de résoudre ce qui lui est proposé sans indications, de chercher dans ses connaissances ce qui peut intervenir.

Dans cet article, nous utilisons la deuxième dimension parmi les outils proposés comme point de départ de notre étude et nous choisissons d'interpréter les concepts topologiques comme les notions FUG pour étudier la question de leur acquisition. En effet, nous nous appuyons sur le fait que ces concepts sont porteurs d'un formalisme nouveau et sont généralisateurs des connaissances antérieures. Une difficulté d'acquisition d'une notion FUG est donc de parvenir à construire un sens à partir des connaissances antérieures et malgré

⁵ Un savoir est dit mobilisable si, lorsqu'il est bien identifié, il est bien utilisé par les élèves.

le nouveau formalisme à utiliser. Pour nous, étudier une notion FUG consiste à regarder ce qui peut amener l'étudiant à une prise de sens.

III. METHODOLOGIE

La réalisation de cet article sur ce thème qui est une première étape de notre recherche, a recouru à l'étude de cas en passant par les étapes suivantes :

- Analyse de l'enseignement de Topologie en première année et établissement d'un état de lieux de cet enseignement tant dans la partie théorique que dans les exercices proposés aux étudiants ;
- Élaboration d'un questionnaire à proposer aux étudiants de deuxième année de Graduat ayant pour but de tester leurs acquis de première année ;
- Élaboration d'un dispositif d'acquisition de notions de topologie à ce niveau d'enseignement.

Ce travail, prémisses des projets articles sur l'acquisition de premières notions de topologie à l'entrée de l'Université, va recourir à la première des trois étapes sus-évoquées.

IV. ANALYSE DE L'ENSEIGNEMENT DE TOPOLOGIE EN 1^{ER} GRADUAT

IV.1. Le référentiel : le cours d'Analyse 1

IV.1.1. Description du cours

Selon les programmes de cours de l'ESU, l'« Analyse 1 » est programmée en première année de Graduat dans les options des études en sciences mathématiques⁶. Ce cours a un volume horaire de 75 heures dont 45 pour la théorie et 30 pour les séances d'exercices (travaux pratiques) qui se font concomitamment avec la théorie et/ou à la fin d'un chapitre. Les étudiants sont confrontés à ces exercices ensemble et ils sont envoyés au tableau pour les résoudre. Le travail se fait donc collectivement en présence de l'assistant chargé des Travaux pratiques et c'est généralement les plus forts qui passent au tableau.

Ce cours est souvent subdivisé en deux parties essentielles. La première couvre « les fondements de la droite réelle »⁷. Il présente une étude détaillée de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels qui est l'espace de travail pour un premier cours d'analyse mathématique. L'exposé commence par quelques notions d'algèbre : principe de récurrence, ensembles ordonnés, ensembles dénombrables, majorant, minorant et axiome du choix. Le corps des nombres réels est présenté de façon axiomatique et ses propriétés algébriques sont exploitées. La deuxième partie de ce chapitre est consacrée à la structure topologique de $\mathbb{R}$: intervalle centré, convergence, ouvert, fermé, adhérence, compacité.

⁶ Il s'agit ici des programmes issus de la réforme de la Table ronde des Universités du Congo du 29 au 30 octobre 2003.

⁷ Nous avons aussi consulté les deux versions de l'ouvrage du Professeur MUBENGA KAMPOTU consistant des supports didactiques des cours d'Analyse 1 à l'Université de Kinshasa.

La deuxième partie est intitulée « Fonctions réelles d'une variable réelle ». On y étudie l'algèbre des fonctions réelles, les limites et la continuité, les dérivées et les différentielles, l'intégration, les équations différentielles ordinaires du premier et du second ordre et les séries numériques. Un sommaire sera présenté dans les annexes.

Il sied de signaler que la quasi-totalité d'entre les étudiants visés dans notre recherche provient de filières scientifiques et techniques⁸ de l'enseignement secondaire. Une des études attirant notre particulière curiosité a été menée sur un groupe d'environ cent cinquante étudiants durant l'année académique 2018-2019⁹.

IV.1.2. Un choix de contenu : éléments de topologie de $\mathbb{R}$.

Après un travail sur la théorie des ensembles et le corps des réels, une partie du premier chapitre (droite réelle) est consacrée aux éléments de topologie de $\mathbb{R}$. Ce choix de contenu se justifie par le fait que cette discipline constitue la base du cours d'analyse dans les options des études en sciences mathématiques (Mathématiques pures, mathématique en Mathématique-Physique et en Mathématique-Informatique. Cette partie du programme est complètement nouvelle pour les étudiants en ce sens qu'elle n'a pas été abordée dans l'enseignement secondaire. De plus, cette partie est porteuse d'un formalisme nouveau, tant sur le plan des symboles (quantificateurs, intérieur, adhérence, ...) que sur celui de leur utilisation dans les écritures plus complexes.

Nous avons pu constater, durant nos parcours d'enseignant et d'étudiant et sur base des évaluations auxquelles les étudiants ont été soumis, que cette partie du cours est une des sources de nombreux problèmes de compréhension pour les étudiants. Nous pensons qu'une raison à ces difficultés est que l'usage des quantificateurs n'est pas un enjeu explicite de l'enseignement secondaire. L'étudiant doit donc construire les prérequis nécessaires à la topologie en même temps qu'il tente d'accéder à la maîtrise de nouveaux concepts.

IV.2. L'enseignement

IV.2.1. Le cours théorique

De notre point de vue, le cours d'analyse 1 doit permettre aux étudiants d'atteindre les objectifs suivants : déduire des propriétés des nombres réels, acquérir les concepts de base sur la topologie usuelle de $\mathbb{R}$, déterminer la convergence d'une suite et d'une série, étudier localement et globalement une fonction numérique, décider l'existence et calculer l'intégrale des fonctions d'une variable réelle et la convergence des intégrales impropres. Nous savons que les savoirs à acquérir véhiculés à travers ces objectifs gagnent avec grande difficulté le mental des étudiants. Les écritures quantifiées et le formalisme associé posent problème. Pour tenter de remédier à cette situation, les enseignants très sensibles aux difficultés des étudiants rappellent les notions mathématiques qu'ils considèrent comme préalables pour aborder le cours de première année universitaire. Certaines de ces notions ont déjà été

⁸ Nous parlons de filières d'étude qui ont le même programme que la scientifique au secondaire.

⁹ Il s'agit ici du mémoire de licence de Monsieur Kalenda Muamba Germain.

abordées dans l'enseignement secondaire, d'autres non. Malheureusement cette tentative de préparation aux autres cours n'est pas du tout fructueuse. Les étudiants sont donc obligés de progresser dans le cours avec des bases très instables. A ces difficultés viennent s'ajouter des problèmes de rédaction et d'argumentation logique.

A la lumière du travail précité durant l'année 2018-2019, la partie consacrée aux éléments de topologie de $\mathbb{R}$ a commencé vers le dix-huitième jour du mois de décembre 2018. A cette époque de l'année, les sujets suivants avaient été abordés en Analyse :

- Le principe de récurrence ;
- La relation d'ordre ;
- La famille d'ensembles ;
- Les ensembles dénombrables ;
- Les axiomes du corps des réels ;
- La structure d'ordre sur $\mathbb{R}$;
- La dénombrabilité de $\mathbb{Q}$;
- La non dénombrabilité de $\mathbb{R}$;
- La densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$;
- Les nombres irrationnels ;
- La convergence dans $\mathbb{R}$;
- Le théorème de la borne supérieure ;
- Le théorème de Bolzano-Weierstrass et convergence des suites de Cauchy ;
- Quelques limites utiles.

Les concepts topologiques sont introduits par leurs définitions et celles-ci sont ensuite utilisées pour démontrer une série de propriétés.

Le plan du cours pour la partie relative à la topologie comprend les points suivants :

- 1) Intérieur, extérieur et frontière d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$
 - Intervalle ouvert centré
 - Intérieur d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$
 - Frontière et extérieur d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$
 - Ouverts et fermés de $\mathbb{R}$
 - Adhérence ou clôture d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$
 - Voisinage d'un point de $\mathbb{R}$ - point d'accumulation
 - Sous-ensembles denses de $\mathbb{R}$
 - Adhérence et convergence
- 2) Sous-ensembles compacts de $\mathbb{R}$
- 3) Sous-ensembles connexes de $\mathbb{R}$
- 4) Notion de topologie sur un ensemble

Ce plan a été établi en suivant le support du Cours d'analyse 1, édition 2018-2019. Pendant les séances du cours théorique, l'enseignant était susceptible d'y apporter des modifications ; l'ordre dans lequel les notions sont présentées pouvait aussi varier, tous les

résultats n'avaient probablement pas été démontrés et les exemples pouvaient aussi changer par rapport aux données dans le support du cours.

Pour connaître ce qui est effectivement réalisé dans cette partie, nous avons aussi parcouru les notes de quelques étudiants. Nous commentons ci-dessous le cheminement suivi dans les notes de l'étudiant.

- La topologie est introduite par la définition d'un intervalle ouvert centré, c'est-à-dire par une boule ouverte.
- La définition de l'intérieur en est une déduction. Des exemples sont donnés.
- De la notion d'ouverts découle celle de la topologie naturelle $\tau_n = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}\}$.
- La définition d'une topologie sur un ensemble est donnée à partir des propriétés de base. Les notions des topologies finies et réseaux informatiques sont motivées par cette définition.
- L'adhérence d'un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ est définie, tout d'abord, en tant que le plus petit fermé contenant A au sens de l'inclusion et enfin la définition $\bar{A} = A^\circ \cup \text{Fr}(A)$ est donnée, où A° désigne l'intérieur de A et $\text{Fr}(A)$ la frontière de A . Suivent des exemples et des propriétés.
- L'intérieur A° d'un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ explicite la notion de voisinage : $a \in \mathbb{R}$ et $V \subset \mathbb{R}$, V est un voisinage de a si $a \in V^\circ$.

Les propriétés de voisinage sont aussi envisagées.

- Un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\bar{E} = \mathbb{R}$.
- Un sous-ensemble K de $\mathbb{R}$ est un compact (une partie compacte) de $\mathbb{R}$ si K est à la fois borné et fermé. Une première caractérisation de la compacité est donnée : Si $E \subset \mathbb{R}$, alors E est compact de $\mathbb{R}$ si et seulement si toute suite dans E admet une sous-suite convergente dans E . Deux définitions sont présentées dans la deuxième caractérisation :
 - Soit $E \subset \mathbb{R}$. Une collection $\{U_i : i \in I\}$ des parties de $\mathbb{R}$ est un recouvrement de E si $E \subset \bigcup U_i$. Si chaque U_i est un ouvert de $\mathbb{R}$, alors le recouvrement s'appelle recouvrement ouvert de E .
 - Si $E \subset \mathbb{R}$, on définit le diamètre de E par

$$d(E) = \sup\{|x - y| : x, y \in E\}$$

Suivent ensuite des exemples.

- $E \subset \mathbb{R}$ est un connexe ou une partie connexe de $\mathbb{R}$ s'il n'existe pas d'ouverts A et B de $\mathbb{R}$ tels que $E \subset (A \cup B)$, $A \cap E \neq \emptyset$, $B \cap E \neq \emptyset$ et $A \cap B \cap E = \emptyset$. Mais E est non connexe s'il existe deux ouverts non vides de E tels que $E = A \cup B$ et $A \cap B = \emptyset$. Le théorème dont l'énoncé suivant est démontré clôture cette partie dans les notes de l'étudiant : « Soit $E \subset \mathbb{R}$ tel que $E \neq \emptyset$. Alors E est un connexe si et seulement si E est un intervalle de $\mathbb{R}$ ».

L'analyse de l'enseignement théorique met en évidence l'isolement des concepts topologiques au sein du cours : leur introduction n'est pas réellement motivée, ils n'ont pas de lien avec des connaissances antérieures en topologie et ils ne sont pas retravaillés par la suite. Ces concepts ont donc un caractère objet, ils n'apparaissent pas comme outil dans le cours théorique.

Les concepts sont introduits par leurs définitions et celles-ci sont écrites dans un formalisme nouveau pour les étudiants. Elles sont de plus variées puisque des objets tels que les suites et les boules apparaissent. Ces définitions sont utilisées pour démontrer des propriétés sur les notions d'intérieur, d'adhérence, d'ouvert et fermé. Leur fonction est donc « manipulatoire ». Cette manipulation nécessite une incursion dans les cadres de la logique élémentaire et de la théorie des ensembles (présence d'inclusions et d'intersections d'ensembles, d'implications).

Cette analyse nous conforte dans l'idée d'interpréter les concepts topologiques comme des notions FUG. De plus, les connaissances qui sont supposées disponibles pour utiliser ces concepts dans les exercices laissent présager des difficultés chez les étudiants.

IV.2.2. Les travaux pratiques (exercices)

Les exercices ne sont pas nombreux selon nos attentes, nous avons aussi fait recours à certains exemples dans les notes et/ou dans le support du cours.

Pour étudier ce que produit l'interprétation FUG des concepts topologiques dans les exercices, nous procédons à une analyse de tâches¹⁰ à partir des énoncés proposés aux étudiants. Ces analyses auront pour but de renseigner sur les activités potentielles¹¹ des étudiants et en particulier sur la façon dont ils sont amenés à manipuler les concepts dans les exercices.

Pour ce, nous présentons ci-dessous nos axes d'analyse d'énoncés. Nous utilisons les outils d'analyse des contenus proposés par A. Robert (1998). Six axes d'analyse de tâches sont développés, allant du général au particulier. Les deux premiers axes sont globaux, les trois suivants sont des axes locaux d'analyses a priori et le dernier est un axe d'analyse a posteriori. Dans ce travail, nous travaillons avec les deux axes suivants :

- L'axe 3 : l'analyse des tâches a priori
- L'axe 4 : l'analyse des activités¹² des étudiants a priori.

Ce sont des analyses a priori. Nous ne regardons pas, dans cet article, le déroulement effectif en classe mais, de façon empirique, nous supposons qu'il ne ferait que renforcer les analyses a priori. Ces axes sont présentés sous la forme d'une suite des questions que nous avons posées. Les analyses consistent à y apporter des réponses.

¹⁰ Tâches : ce qui est à mettre en œuvre du point de vue mathématique. Elles sont souvent analysées a priori à partir d'énoncés.

¹¹ Il s'agit des activités qui peuvent se réaliser.

¹² Activités : ce qui est à mettre en œuvre du côté de l'élève. Elles sont associées à ce que font les élèves pour résoudre une tâche.

Dans cette série de questions, nous relevons plus particulièrement les caractères ci-après qui, compte tenu de notre choix théorique, sont susceptibles de dégager des traits particuliers du travail sur les concepts topologiques :

- Le caractère outil/objet des notions à utiliser ;
 - Le rôle spécifique du formalisme ;
 - L'utilisation des connaissances anciennes ou en cours d'acquisition ;
 - Les niveaux de mise en fonctionnement des connaissances ;
 - Les types de raisonnements mis en jeu ;
 - Les adaptations à effectuer pour résoudre la tâche ;
- Dans (Robert, 2005), six types d'adaptations sont dégagés, pouvant intervenir simultanément :
- A1. Les reconnaissances des modalités d'application des notions, théorèmes, méthodes, formules, ...
 - A2. L'introduction d'intermédiaires tels que des points, des notations, des expressions, ...
 - A3. Les mélanges de plusieurs cadres ou notions, les changements de points de vue, de cadres ou de registres, les mises en relation ou interprétations.
 - A4. L'introduction des étapes, l'organisation des calculs ou des raisonnements. Les étapes peuvent être classiques ou à imaginer.
 - A5. L'utilisation des questions précédentes dans un problème.
 - A6. L'existence des choix, forcés ou non.
- Les moyens de contrôle.

1. Les énoncés

Nous présentons ici les exercices types proposés aux étudiants.

1. Ecrire le sous-ensemble $]3, 4[$ de $\mathbb{R}$ comme intervalle centré ouvert.
2. Le réel 2 est-il un point intérieur à $A = [2, 5[$? ($A \subset \mathbb{R}$).
3. $A =]-1, 1[$ et $B =]0, 3[$ ($A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$). Montrer que $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ = A \cap B$.
4. Si $A = [-1, 2[$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, alors déterminer :
a) A° b) $\text{Fr}(A)$ c) $\bar{A}$ d) $\text{Ext}(A)$
5. Soient $X = \{1, 2, 3\}$ et $\tau = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, X\}$ tous les ouverts de τ .
a) Trouver les fermés de τ .
b) Dans chacun des cas suivants, déterminer $\bar{A}$:
1) $A = \{1\}$ 2) $A = \{3\}$ 3) $A = \{2\}$ 4) $A = \{2, 3\}$.
6. $A =]-1, 0[$ et $B =]-2, 1[$ ($A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$). Montrer que $A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$ et $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cup B}$.
7. $]0, 1[$ est-il ouvert de $[0, 1]$? Fermé de $[0, 1]$?

2. Analyse des énoncés

- Remarques préliminaires

Pour chaque exercice analysé, nous commençons par le résoudre effectivement en envisageant les solutions possibles. Ensuite, nous procédons à l'analyse des tâches (A. Robert, 1998) présentées plus haut.

- Exercice 1

- ✓ Solution possible

$$\begin{array}{ccccccc}
 -\infty & & 3 & & a & & 4 & & +\infty \\
 & & \text{---} & & \text{---} & & \text{---} & & \text{---} \\
 & & r=a-3 & & r=4-a & & & & \\
 a = \frac{3+4}{2} = 3,5 & \text{et} & r = 3,5 - 3 = 0,5 \\
 \text{D'où, }]3, 4[=]3,5-0,5 ; 3,5+0,5[
 \end{array}$$

- ✓ Analyse de l'énoncé

La question est ouverte et aucune méthode n'est indiquée. Il suffit de calculer le centre et le rayon de l'intervalle donné et exprimer cet intervalle en un intervalle ouvert centré.

- ✓ Conclusion

La méthode est fournie par l'enseignant et consiste à considérer le centre de l'intervalle donné comme moyenne arithmétique de ses deux extrémités et le rayon comme différence, en valeur absolue, d'une extrémité et le centre. La tâche est donc simple et isolée. Les activités engendrées portent sur le calcul dans $\mathbb{R}$ et non sur la topologie.

- Exercice 3

- ✓ Solution possible

$$\begin{array}{l}
 A =]-1, 1[\Rightarrow A^\circ =]-1, 1[. \\
 B =]0, 3[\Rightarrow B^\circ =]0, 3[. \\
 A \cap B =]0, 1[\Rightarrow (A \cap B)^\circ =]0, 1[\text{ et } A^\circ \cap B^\circ =]0, 1[. \\
 \text{D'où } (A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ =]0, 1[.
 \end{array}$$

- ✓ Conclusion

Les tâches sont simples et isolées puisqu'elles portent sur les définitions des fermés, des ouverts et sur les propriétés de l'intérieur données dans le cours théorique.

- Exercice 7

✓ Solution possible

$]0,1]$ est ouvert de $[0,1]$. Il suffit de trouver un ouvert U de $\mathbb{R}$ et montrer que $]0,1] = U \cap [0,1]$.

1) Si $U =]0, +\infty[$, alors $]0,1] =]0, +\infty[\cap [0,1]$;

2) Si $U =]0,3[$, alors $]0,1] =]0,3[\cap [0,1]$; et ainsi de suite.

✓ Analyse de l'énoncé

La question est fermée avec méthode. Le choix judicieux d'un ouvert de $\mathbb{R}$ aidera l'étudiant à déterminer la bonne réponse.

✓ Conclusion

La tâche est simple et isolée. Le recours à la définition suivante est un impératif : « $A \subset \mathbb{R}$ est un ouvert de $E \subset \mathbb{R}$ s'il existe un ouvert $U \subset \mathbb{R}$ tel que $A = U \cap E$ ». La théorie des ensembles, la logique et la topologie sont les cadres mobilisés dans cet exercice.

3. Synthèse

Le tableau ci-dessus reprend, pour chaque exercice analysé, les notions du cours théorique que l'exercice fait travailler et la tâche lui associée :

Table au n° 1: Exercices et notions théoriques sollicitées

Exercice	Notions	Tâche mathématique En topologie	Connaissances antérieures	Connaissances en Topologie	Cadres
1.	Intervalle ouvert centré	Simple et isolée	Règles de calcul dans $\mathbb{R}$, centre et rayon d'un intervalle	-	Calcul dans $\mathbb{R}$
3.	Intérieur	Simple et isolée	Intersection d'ensembles	Propriété de l'intérieur : $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$	-Théorie des ensembles -Topologie
5.	- Fermé - Adhérence	Simple et isolée	-Différence d'ensembles au sens de complémentaire d'un ensemble -Inclusion d'ensembles.	-Fermé et ouvert -Propriété de l'adhérence : $\bar{E}$ est le plus petit fermé de $\mathbb{R}$ contenant E	-Théorie des ensembles -Logique élémentaire -Topologie

7.	Ouvert	Simple et isolée	-Inclusion d'ensembles -Intersection d'ensembles	Intersection finie d'ouverts	-Théorie des ensembles -Logique -Topologie
----	--------	------------------	---	------------------------------	--

Source : Nous-mêmes

Le tableau montre que toutes notions travaillées tournent autour de fermés et d'ouverts, et sans analyser tous les exercices, la simple lecture de leurs énoncés nous autorise à penser qu'il en sera de même pour les autres exercices.

Le recours à une définition et/ou à une propriété est un atout dans la résolution des exercices analysés. Même si les énoncés sont posés dans le cadre de la Topologie, nous avons constaté que les activités associées ne sont pas toutes de nature topologique. Le tableau montre que les connaissances en Topologie qui sont utilisées ne sont pas de connaissances avancées.

Conclusion

Par cette analyse, nous nous sommes rendu à l'évidence que les concepts topologiques font intervenir un formalisme nouveau pour les étudiants. Nous avons repéré dans ce formalisme différents types de symbolismes :

- Un symbolisme ensembliste (présence d'inclusions, d'intersections, ...) ;
- Un symbolisme topologique (symboles de l'intérieur, de l'adhérence, ...) ;
- Un symbolisme lié à l'ordre (présence d'inégalités) ;
- Un symbolisme lié à la Logique (présence de quantificateurs, d'implications, ...).

Ainsi, les difficultés des étudiants dans l'acquisition de ces premières notions de Topologie se confirment parce que le formalisme introduit dans les définitions pose des problèmes de compréhension et sa seule fonctionnalité consiste à être manipulée dans les exercices. Une enquête s'impose en deuxième année dans notre démarche de compilation des difficultés d'étudiants et aussi dans la vérification de leur acquis réel des notions topologiques de première année.

Bibliographie

I. Ouvrages

- [1]. Jordan C. (1893). *Cours d'Analyse*, t.1, seconde édition, Gauthier-Villars, Paris, 636p.
- [2]. Lipschutz, S.(1999). *Topologie, cours et problèmes*, Série Schaum. Traduit par M. LOBENBERG, Chiron, France, 260p.
- [3]. Mubenga Kampotu (1976). *Eléments d'analyse infinitésimale. Vol.1. Les fondements*, Presses Universitaires du Zaïre, Rectorat, Kinshasa.
- [4]. Revuz A. et G. (1966). *Cours de l'APM, éléments de Topologie*, t. III, APMEP, Paris, 248p.
- [5]. Schwartz L. (1967). *Cours d'Analyse*, Hermann, Paris, 830p.

II. ARTICLES SCIENTIFIQUES

- [6]. Bridoux S. (2009). Une séquence d'introduction des notions de Topologie dans $\mathbb{R}^n$: de la conception à l'expérimentation. *Actes du colloque EMF 2009*, Université de Dakar, Sénégal, pp. 988-1001.
- [7]. Douady R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil/objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 7/2, La Pensée Sauvage, Grenoble, pp.5-31.
- [8]. Douady R. (1994). Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir, *Repères-Irem*, n° 15, Topiques Editions, France, pp. 1-25.
- [9]. Pian J. (sd). Diagnostic des connaissances de Mathématiques des étudiants de CAPES, vers une interprétation cognitive des apprentissages individuels, *Cahier de Didirem*, n° 34, Irem Paris 7, France, pp. 1-446.
- [10]. Robert A. (1998). Outils d'analyse des contenus à enseigner au lycée et à l'université, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 18/2, Université de Cergy-Pontoise, La Pensée sauvage, Grenoble, pp. 139-190.
- [11]. Robert A. (2005). Deux exemples d'activités en formation des enseignants de Mathématiques du second degré, *Petit x*, n° 67, IUFM Versailles, France, pp. 63-76.
- [12]. Robert A. et Rogalski M. (2004). Problèmes d'introduction et autres problèmes de recherche au lycée, *Repères-Irem*, n° 54, France, pp. 78
- [13]. Vergnaud G. (1990). La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 10/2-3, Université de Rennes, France, pp. 133-170.

III. Thèse et Mémoire

- [14]. Bridoux S. (2020). Enseignement des premières notions de topologie à l'Université- Une étude de cas (<http://tel.archives-ouvertes.fr/tel.00660249>) consulté le 30 juin 2021.
- [15]. Kalenda Muamba G. (2019). Acquisition de premières notions de Topologie au début du Graduat en Mathématiques. Mémoire de Licence en sciences, Université Pédagogique Nationale, année académique 2018-2019, 145p.

IV. NOTES DE COURS

[16]. Ntantu D., Notes de cours d'Analyse I, G1 Mathématique-Informatique, Université Pédagogique Nationale, Kinshasa, 2013-2014, 136p.

[17]. Ntantu D., Notes de cours d'Analyse I, G1 Mathématique-Informatique, Université Pédagogique Nationale, Kinshasa, 2018-2019, 145p.

V. AUTRES DOCUMENTS

[18]. Programmes des cours. Réforme de la Table ronde des Universités du Congo (1954-2004). Cinquante ans de l'Université au Congo. Edition de la Commission Permanente des Études (C.P.E.), Kinshasa, juin 2010, pp. 111-116.